Sorozatok
Megoldások

1) Egy mértani sorozat első tagja 8, hányadosa 0,5. Számítsa ki a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

Megoldás:

$a_1 \cdot q^4 = 8 \cdot (0,5)^4 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{2}$ (2 pont)

2) Egy számtani sorozat második tagja 17, harmadik tagja 21.

a) Mekkora az első 150 tag összege? (5 pont)

Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25 863.

b) Igaz-e, hogy 25 863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25 863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

Megoldás:

a) $a_2 = 17 = a_1 + d$ és $a_3 = 21 = a_1 + 2d$

$d = 4$ (1 pont)

$a_1 = 13$ (1 pont)

$a_{150} = a_1 + 149d = 609$ (1 pont)

$S_{150} = \frac{13+609}{2} \cdot 150$ (1 pont)

$S_{150} = \mathbf{46650}$ (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 1. feladat*

c) *Lásd: Számelmélet 1. feladat*

Összesen: 12 pont

3) Egy kultúrpalota színháztermének a nézőtere szimmetrikus trapéz alaprajzú, a széksorok a színpadtól távolodva rövidülnek. A leghátsó sorban 20 szék van, és minden megelőző sorban 2-vel több, mint a mögötte lévőben. 500 diák és 10 kísérő tanár pont megtöltik a nézőteret. Hány széksor van a nézőtéren? (12 pont)

Megoldás:

Legyen a széksorok száma: n. (1 pont)

A sorokban levő székek száma egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat egymást követő elemeit adja. (1 pont)

$a_1 = 20$ (1 pont)

Az n-edik (első) sorban $a_n = 20 + (n-1) \cdot 2$ szék van. (1 pont)

Az összes helyre az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ alkalmazható. (1 pont)

$510 = \frac{n}{2} \cdot \left(20 + 20 + (n-1) \cdot 2\right)$ (2 pont)

$2n^2 + 38n - 1020 = 0$ (2 pont)

$n_1 = 15$ és $n_2 = -34$ (1 pont)

n_2 nem ad megoldást. (1 pont)

15 széksor van a nézőtéren. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Mennyi annak a mértani sorozatnak a hányadosa, amelynek harmadik tagja 5, hatodik tagja pedig 40? (2 pont)

Megoldás:

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = 5$

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 40$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{q = 2}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.

a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám? (8 pont)

b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (4 pont)

Megoldás:

a) Az összeadott páratlan számok egy $d = 2$ differenciájú számtani sorozat szomszédos tagjai. (1 pont)

Legyen az összeg legkisebb tagja a_1, ekkor $a_{55} = a_1 + 54 \cdot 2$ (1 pont)

A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó képletet alkalmazva:

$S_{55} = 55 \cdot \frac{2a_1 + 54 \cdot 2}{2} \Rightarrow 3905 = 55(a_1 + 54)$ (2 pont)

$\boldsymbol{a_1 = 17}$ (1 pont)

$\boldsymbol{a_{55} = 125}$ (1 pont)

Tehát a keresett páratlan számok a 17 és a 125. (1 pont)

Ellenőrzés: az összes valóban 3905. (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 4. feladat*

Összesen: 12 pont

6) Egy számtani sorozat első eleme 8, differenciája $-\frac{2}{3}$. Mekkora a sorozat negyedik eleme? (2 pont)

Megoldás:

A sorozat negyedik eleme $\boldsymbol{6}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

7) Egy útépítő vállalkozás egy munka elkezdésekor az első napon 220 méternyi utat aszfaltoz le. A rákövetkező napon 230 métert, az azutánin 240 métert és így tovább: a munkások létszámát naponta növelve minden következő munkanapon 10 méterrel többet, mint az azt megelőző napon.

a) Hány méter utat aszfaltoznak le a 11-edik munkanapon? (3 pont)

b) Az összes aszfaltozandó út hossza ebben a munkában 7,1 km. Hányadik munkanapon készülnek el vele? (8 pont)

c) Hány méter utat aszfaltoznak le az utolsó munkanapon? (3 pont)

d) A 21-edik napon kétszer annyian dolgoztak, mint az első napon. Igaz-e az a feltételezés, hogy a naponta elkészült út hossza egyenesen arányos a munkások létszámával? (Válaszát indokolja!) (3 pont)

Megoldás:

a) Számtani sorozatról van szó: $a_1 = 220$, d=10

$A_{11} = a_1 + 10d =$ (2 pont)

$= 220 + 10 \cdot 10 = 320$

320 métert aszfaltoznak le a 11. munkanapon. (1 pont)

b) $S_n \geq 7100$; $n = ?$, ahol n pozitív egész szám. (1 pont)

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$7100 = \frac{2 \cdot 220 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n$$ (2 pont)

$$1420 = (44 + n - 1) \cdot n$$

$$n^2 + 43n - 1420 = 0$$ (2 pont)

Egyetlen pozitív megoldás van $(n \approx 21{,}88)$, (1 pont)

de ez nem egész. (1 pont)

Az aszfaltozással a **22. munkanapon** készülnek el. (1 pont)

c) $$S_{21} = \frac{2 \cdot 220 + (21-1) \cdot 10}{2} \cdot n$$ (1 pont)

$$S_{21} = 6720$$ (1 pont)

Az utolsó munkanapon $7100 - 6720 =$ **380** méter utat aszfaltoztak le. (1 pont)

d) Egyenes arányosság esetén 440 métert kellene aszfaltozni a 21. napon.

(1 pont)

$a_{21} = 2 \cdot 220 + 20 \cdot 10 = 420$ (1 pont)

Nem teljesül az egyenes arányosság. (1 pont)

Összesen: 17 pont

8) Egy mértani sorozat második eleme 32, hatodik eleme 2. Mekkora a sorozat hányadosa? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

A feltételből $32q^4 = 2$, ahonnan (1 pont)

$$\boldsymbol{q_1 = \frac{1}{2}\left(= \sqrt[4]{0{,}0625}\right)}$$ (1 pont)

$$\boldsymbol{q_2 = -\frac{1}{2}}$$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

9) a) Határozza meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:

- **számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai;**
- **a szám értéke 53,5-szerese a számjegyei összegének;**
- **ha kivonjuk belőle az első és utolsó jegy felcserélésével kapott háromjegyű számot, akkor 594 az eredmény. (10 pont)**

b) Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai! (4 pont)

c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a b) kérdésben szereplő számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel! (3 pont)

Megoldás:

a) A háromjegyű szám számjegyei: $a-d$; a; $a+d$, ahol a a számtani sorozat középső tagja, d a differencia. (1 pont)

Felírható: $100(a-d)+10a+a+d=53{,}5\cdot 3a$ (1) (2 pont)

és $\left[100(a-d)+10a+a+d\right]-\left[100(a+d)+10a+a+d\right]=594$ (2) (2 pont)

A (2) egyenletből: $-198d=594$ (1 pont)

ahonnan $d=-3$ (1 pont)

Az (1) egyenletből: $111a-99d=53{,}5\cdot 3a$ (1 pont)

ahonnan $a=-2d$ (1 pont)

$a=-2\cdot(-3)=6$ a középső számjegy, a háromjegyű szám: **963**. (1 pont)

A feladat úgy is megoldható, ha a számtani sorozat első tagját jelöljük a-val.

b) A megfelelő számok:

234; 345; 456; 567; 678; 789; 246; 357; 468; 579; 258; 369. (4 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 71. feladat*

Összesen: 17 pont

10) Egy számtani sorozat első és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat első öt tagjának összege? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$S_5=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ (1 pont)

$S_5=\dfrac{60}{2}\cdot 5$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_5=150}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) Szabó nagymamának öt unokája van, közülük egy lány és négy fiú. Nem szeret levelet írni, de minden héten ír egy-egy unokájának, így öt hét alatt mindegyik unoka kap levelet.

a) Hányféle sorrendben kaphatják meg az unokák a levelüket az öt hét alatt? (3 pont)

b) Ha a nagymama véletlenszerűen döntötte el, hogy melyik héten melyik unokájának írt levél következik, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy lányunokája levelét az ötödik héten írta meg? (3 pont)

Szabó nagymama sálat kötött egyetlen lányunokájának. Az első napon 8 cm készült el a sálból, és a nagymama elhatározta, hogy a további napokon mindennap 20 százalékkal többet köt meg, mint az előző napon. Ezt az elhatározását tartani tudta.

c) Hány nap alatt készült-el a 2 méter hosszúra tervezett sál? (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 41. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 14. feladat*

c) Az egyes napokon kötött darabok hosszúságai mértani sorozatot alkotnak. (1 pont)

A mértani sorozatban $a_1=8$, $q=1{,}2$ (2 pont)

A sál teljes hossza a mértani sorozat első n elemének összegeként adódik. (1 pont)

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$ (1 pont)

$$200 = 8 \cdot \frac{1{,}2^n - 1}{0{,}2}$$ (1 pont)

$$5 + 1 = 1{,}2^n$$ (1 pont)

$$n = \frac{\lg 6}{\lg 1{,}2}$$ (2 pont)

$$n \approx 9{,}83$$ (1 pont)

A sál a tizedik napon készül el. (1 pont)

Összesen: 17 pont

12) Egy számtani sorozat első tagja –3, differenciája –17. Számítsa ki a sorozat 100-adik tagját! Számítását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

$a_1 = -3 \quad d = -17$

$a_{100} = -3 + 99 \cdot (-17) = \mathbf{-1686}$ (2 pont)

A sorozat 100-adik tagja: –1686. (1 pont)

Összesen: 3 pont

13) Egy mértani sorozat első tagja –3, a hányadosa –2. Adja meg a sorozat ötödik tagját! Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

Megoldás:

$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$ (1 pont)

$a_5 = (-3) \cdot (-2)^{(5-1)}$ (1 pont)

A sorozat ötödik tagja: **–48**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

14) Egy mértani sorozat első tagja –5, hányadosa –2. Számítsa ki a sorozat tizenegyedik tagját! Indokolja a válaszát! (1 pont)

Megoldás:

$a_{11} = (-5) \cdot (-2)^{10}$

$\boldsymbol{a_{11} = -5120}$ (1 pont)

15) Angéla a pihenőkertjük egy részére járólapokat fektetett le. Az első sorba 8 járólap került, minden további sorba kettővel több, mint az azt megelőzőbe. Összesen 858 járólapot használt fel.

a) Hány sort rakott le Angéla? (6 pont)

A járólapokat 225-ös csomagolásban árusítják. Minden csomagban bordó színű a járólapok 16 %-a, a többi szürke. Angéla 4 csomag járólapot vásárolt. Csak bordó színű lapokat rakott le az első és az utolsó sorba. Ezen kívül a többi sor két szélén levő 1–1 járólap is bordó, az összes többi lerakott járólap szürke.

b) Adja meg, hogy hány szürke és hány bordó járólap maradt ki a lerakás után! (6 pont)

Megoldás:

a) A soronként elhelyezett járólapok számát annak a számtani sorozatnak egymást követő tagjai adják, melyre $a_1 = 8$, $d = 2$ (1 pont)

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n =$$ (1 pont)

$= 858$ (1 pont)

$n^2 + 7n - 858 = 0$ (1 pont)

$n_1 = 26$ és $n_2 = -33$ (A megfelelő pozitív egész szám $\boldsymbol{n = 26}$.) (1 pont)

Angéla 26 teljes sort rakott le (ez a megoldás a feltételeknek megfelel). (1 pont)

b) A bordó járólapok száma 144. (2 pont)

A huszonhatodik sorba $a_{26} = a_1 + 25d = 8 + 50 = 58$ járólap került. (1 pont)

A burkolt rész peremére $8 + 58 + 2 \cdot 24 = 114$ bordó színű került. (1 pont)

30 bordó járólap maradt ki. (1 pont)

Összesen $900 - 858 = 42$ járólap maradt ki, ezek közül **12 szürke és 30 bordó**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

16) a) Egy számtani sorozat első tagja –7, a nyolcadik tagja 14. Adja meg *n* lehetséges értékeit, ha a sorozat első *n* tagjának összege legfeljebb 660. (9 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja ugyancsak –7, a negyedik tagja –189. Mekkora az *n*, ha az első *n* tag összege –68887? (8 pont)

Megoldás:

a) $a_8 = a_1 + 7d$, ahol d a sorozat differenciája.

$14 = -7 + 7d$ (1 pont)

$d = 3$ (1 pont)

$660 \geq S_n$ (1 pont)

$S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \dfrac{-14 + 3 \cdot (n-1)}{2} \cdot n$ (1 pont)

$3n^2 - 17n - 1320 \leq 0$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség bal oldalához kapcsolható másodfokú függvénynek minimuma van ($a = 3 > 0$, vagy grafikonra hivatkozás stb.), (1 pont)

zérushelyei: 24 és $-\dfrac{55}{3}$ (ami negatív). (1 pont)

$\left(-\dfrac{55}{3} < 0 <\right) n \leq 24$ (1 pont)

Mivel a feladatunkban n pozitív egész, n lehetséges értékei: **1, 2, ..., 23, 24** (1 pont)

b) $a_4 = a_1 \cdot q^3$, ahol q a sorozat differenciája.

$-189 = -7 \cdot q^3$ (1 pont)

$q = 3$ (1 pont)

$S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = -7 \cdot \dfrac{3^n - 1}{2}$ (1 pont)

$-68887 = -7 \cdot \dfrac{3^n - 1}{2}$ (1 pont)

$3^n = 19683$ (2 pont)

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű (szigorúan monoton), (1 pont)

$\boldsymbol{n = 9}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) Melyik a 201-edik pozitív páros szám? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az $a_1 = 2$ első tagú, $d = 2$ differenciájú számtani sorozat felismerése. (1 pont)

$a_{201} = 2 + 200 \cdot 2 =$ (1 pont)

$= \mathbf{402}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) Egy számtani sorozat ötvenedik tagja 29, az ötvenegyedik tagja 26. Számítsa ki a sorozat első tagját! (3 pont)

Megoldás:

$d = -3$ (1 pont)

$a_{50} = a_1 + 49d$ (1 pont)

$a_1 = \mathbf{176}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

19) Egy mértani sorozat első tagja 3, hányadosa (-2). Adja meg a sorozat első hat tagjának összegét! (2 pont)

Megoldás:

$S_n = n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, ebből: $\mathbf{S_6 = -63}$ (2 pont)

20) Az újkori olimpiai játékok megrendezésére 1896 óta kerül sor, ebben az évben tartották az első (nyári) olimpiát Athénban. Azóta minden negyedik évben tartanak nyári olimpiát, és ezeket sorszámmal látják el. Három nyári olimpiát (az első és a második világháború miatt) nem tartottak meg, de ezek az elmaradt játékok is kaptak sorszámot.

a) Melyik évben tartották a 20. nyári olimpiai játékokat? (2 pont)

b) Számítsa ki, hogy a 2008-ban Pekingben tartott nyári olimpiának mi volt a sorszáma! (2 pont)

A nyári olimpiák szervezőinek egyik fő bevételi forrása a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel. Rendelkezésünkre állnak a következő adatok (millió dollárban számolva):

Olimpia sorszáma	20.	22.
Bevétel a televíziós jogok értékesítéséből	75	192

Eszter úgy véli, hogy a televíziós jogok értékesítéséből származó bevételek – a 20. olimpiától kezdve – az egymás utáni nyári olimpiákon egy számtani sorozat egymást követő tagjait alkotják. Marci szerint ugyanezek a számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A saját modelljük alapján mindketten kiszámolják, hogy mennyi lehetett a televíziós jogok értékesítéséből származó bevétel a 27. nyári olimpián. Ezután megkeresik a tényleges adatot, amely egy internetes honlap szerint 1383 (millió dollár).

c) Számítsa ki, hogy Eszter vagy Marci becslése tér el kisebb mértékben a 27. nyári olimpia tényleges adatától! (8 pont)

Megoldás:

a) A nyári olimpiák évszámai egy olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1896, különbsége pedig 4. (1 pont)

$a_{20} = 1896 + 19 \cdot 4 = 1972$ vagyis **1972**-ben tartották a 20. nyári olimpiát. (1 pont)

b) $1896+(n-1)\cdot 4=2008$, tehát $n=$**29.** nyári olimpiát tartották 2008-ban.

(2 pont)

c) A megadott két adatot egy számtani sorozat első, illetve harmadik tagjának tekintve: $75+2d=192$, amiből $d=58,5$ (2 pont)

Így, Eszter becslése a sorozat nyolcadik tagjára:

$75+7d=484,5$ (millió dollár) (1 pont)

(A megadott két adatot egy mértani sorozat első illetve harmadik tagjának tekintve:) $75q^2=192$, amiből ($q>0$ miatt) $q=1,6$ (2 pont)

Így Marci becslése a sorozat nyolcadik tagjára: $75q\approx 2013$ (millió dollár)

(1 pont)

$1383-485=898$ és $2013-1383=630$, vagyis **Marci becslése tér el kevésbé** a tényleges adattól. (2 pont)

Összesen: 12 pont

21) a) Egy számtani sorozat első tagja 2, első hét tagjának összege 45,5. Adja meg a sorozat hatodik tagját! (5 pont)

b) Egy mértani sorozat első tagja 5, második és harmadik tagjának összege 10. Adja meg a sorozat első hét tagjának az összegét! (7 pont)

Megoldás:

a) A sorozat differenciáját d-vel jelölve: $45,5=\frac{2\cdot 2+(7-1)d}{2}\cdot 7$ (1 pont)

$13=4+6d$ (1 pont)

$d=1,5$ (1 pont)

$a_6=2+5\cdot 1,5$ (1 pont)

A sorozat 6. tagja **9,5**. (1 pont)

b) A sorozat hányadosát q-val jelölve: $5q+5q^2=10$ (1 pont)

$q_1=-2$; $q_2=1$ (2 pont)

Ha a hányados –2, akkor a sorozat első hét tagjának összege: $S_7=5\cdot\frac{(-2)^7-1}{-2-1}=\mathbf{215}$ (2 pont)

Ha a hányados 1, akkor a sorozat tagjai megegyeznek, így ebben az esetben az első hét tag összege $(7\cdot 5)=\mathbf{35}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

22) Az $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja és differenciája is 4. Adja meg a sorozat 26. tagját! (2 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{a_{26}=104}$ (2 pont)

23) A $\{b_n\}$ mértani sorozat hányadosa 2, első hat tagjának összege 94,5. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

$94,5=b_1\cdot\frac{2^6-1}{2-1}$ (1 pont)

$94,5=b_1\cdot 63$ (1 pont)

$\boldsymbol{b_1=1,5}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

24) Egy számtani sorozat első tagja 5, második tagja 8.

a) Adja meg a sorozat 80. tagját! **(2 pont)**

b) Tagja-e a fenti sorozatnak a 2005? (Válaszát számítással indokolja!) **(3 pont)**

c) A sorozat első n tagját összeadva az összeg 1550. Határozza meg n értékét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) $a_1 = 5$ és $a_2 = 8$

$d = a_2 - a_1 = 3$ (1 pont)

$a_{80} = a_1 + 79d$

$\boldsymbol{a_{80} = 242}$. (1 pont)

b) Ha 2005 a sorozat n-edik tagja, akkor $2005 = 5 + (n-1)\cdot 3$ (1 pont)

$2000 = (n-1)\cdot 3$ azaz $\frac{2003}{3} = n$ (1 pont)

Mivel $\frac{2003}{3} \notin \mathbb{N}^+$, a **2005 nem tagja a sorozatnak**. (1 pont)

c) Az első n tag összege: $S_n = \frac{5+5+(n-1)\cdot 3}{2}\cdot n = 1550$ (2 pont)

Ebből $(10+3n-3)\cdot n = 3100$, azaz $3n^2 + 7n - 3100 = 0$. (1 pont)

$n_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+37200}}{6} \Rightarrow n_1 = 31$ és $n_2 = \frac{-200}{6}$ (2 pont)

Mivel $n_2 \notin \mathbb{N}^+$, $n_1 = 31$ lehet csak a válasz. (1 pont)

Ellenőrzés: $\frac{10+30\cdot 3}{2}\cdot 31 = 1550$, **tehát 31 tagot kell összeadni**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

25) a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! **(5 pont)**

b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A sorozat tagjai: 6; 6 + d; 6 + 2d; 1623 (1 pont)

6 + 3d = 1623 (1 pont)

d = 539 (1 pont)

Az első beiktatott szám: 545 (1 pont)

A második beiktatott szám: **1084** (1 pont)

b) A feltételeknek megfelelő számok: 8; 12; 16; ...; 1620 (2 pont)

Ezek a számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai (1 pont)

$1620 = 8 + 4\cdot(n-1)$ (1 pont)

$n = 404$ (1 pont)

$S_n = \frac{8+1620}{2}\cdot 404$ (1 pont)

$\boldsymbol{S_n = 328856}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

26) Egy számtani sorozat hatodik tagja 15, kilencedik tagja 0. Számítsa ki a sorozat első tagját! Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

A számtani sorozat különbségét d-vel jelölve adódik:

$3d = -15$ (1 pont)

amiből $d = -5$. (1 pont)

A sorozat első tagja **40**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) A kólibaktérium (hengeres) pálcika alakú, hossza átlagosan 2 mikrométer $\left(2 \cdot 10^{-6}\text{m}\right)$, átmérője 0,5 mikrométer $\left(5 \cdot 10^{-7}\text{m}\right)$.

a) Számítsa ki egy 2 mikrométer magas és 0,5 mikrométer átmérőjű forgáshenger térfogatát és felszínét! Számításainak eredményét m^3-ben, illetve m^2-ben, normálalakban adja meg! (5 pont)

Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz.

b) Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével? (4 pont)

A baktériumok számát a tápoldatban t perc elteltével a $B(t) = 3000000 \cdot 2^{\frac{t}{15}}$ összefüggés adja meg.

c) Hány perc alatt éri el a kólibaktériumok száma a tápoldatban a 600 milliót? Válaszát egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 25. feladat*

b) A kólibaktériumok száma 1,5 óra alatt 6-szor duplázódott, (2 pont)

ezért 1,5 óra után $3000000 \cdot 2^6 =$ (1 pont)

$=$ **192** millió lesz a baktériumok száma. (1 pont)

c) A baktériumok száma x perc múlva lesz 600 millió. Meg kell oldanunk a

$3 \cdot 2^{\frac{x}{15}} = 600$ egyenletet. (2 pont)

$2^{\frac{x}{15}} = 200$ (1 pont)

Átalakítva:

$\frac{x}{15} = \log_2 200$ (2 pont)

$x = 15 \cdot \frac{\lg 200}{\lg 2}$ (1 pont)

amiből $\boldsymbol{x \approx 115}$ adódik, tehát (1 pont)

115 perc múlva lesz a baktériumok száma 600 millió. (1 pont)

Összesen: 17 pont

28) a) Egy számtani sorozat első tagja 5, differenciája 3. A sorozat első n tagjának összege 440. Adja meg n értékét! (5 pont)

a) Egy mértani sorozat első tagja 5, hányadosa 1,2. Az első tagtól kezdve legalább hány tagot kell összeadni ebben a sorozatban, hogy az összege elérje az 500-at? (7 pont)

Megoldás:

a) A szöveg alapján felírható egyenlet:

$440 = \frac{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n$. (1 pont)

Ebből $3n^2 + 7n - 880 = 0$. (2 pont)

A negatív gyök $\left(-\frac{55}{3}\right)$ a feladatnak **nem** megoldása. (1 pont)

$n = 16$ (1 pont)

b) Keressük a következő egyenlet megoldását:

$500 = 5 \cdot \frac{1,2^n - 1}{1,2 - 1}$. (1 pont)

$21 = 1,2^n$ (2 pont)

(mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve)

$\lg 21 = \lg 1,2^n$ (1 pont)

$\lg 21 = n \cdot \lg 1,2$ (1 pont)

$n \approx 16,7$ (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak legalább **17** tagját kell összeadni, hogy az összeg elérje az 500-at. (1 pont)

Összesen: 12 pont

29) A vízi élőhelyek egyik nagy problémája az algásodás. Megfelelő fény- és hőmérsékleti viszonyok mellett az algával borított terület nagysága akár 1-2 nap alatt megduplázódhat.

a) Egy kerti tóban minden nap (az előző napi mennyiséghez képest) ugyanannyi-szorosára növekedett az algával borított terület nagysága. A kezdetben $1,5\ m^2$-en észlelhető alga hét napi növekedés után borította be teljesen a $27\ m^2$-es tavat. Számítsa ki, hogy naponta hányszorosára növekedett az algás terület! (4 pont)

Egy parkbeli szökőkút medencéjének alakja szabályos hatszög alapú egyenes hasáb. A szabályos hatszög egy oldala 2,4 m hosszú, a medence mélysége 0,4 m. A medence alját és oldalfalait csempével burkolták, majd a medencét teljesen feltöltötték vízzel.

b) Hány m^2 területű a csempével burkolt felület, és legfeljebb hány liter víz fér el a medencében? (8 pont)

A szökőkútban hat egymás mellett, egy vonalban elhelyezett kiömlő nyíláson keresztül törhet a magasba a víz. Minden vízsugarat egy-egy színes lámpa világít meg. Mindegyik vízsugár megvilágítása háromféle színű lehet: kék, piros vagy sárga. Az egyik látványprogram úgy változtatja a vízsugarak megvilágítását, hogy egy adott pillanatban három-három vízsugár színe azonos legyen, de mind a hat ne legyen azonos színű (például kék-sárga-sárga-kék-sárga-kék).

c) Hányféle különböző látványt nyújthat ez a program, ha vízsugaraknak csak a színe változik? (5 pont)

Megoldás:

a) Ha naponta x-szeresére nőtt az algás terület, akkor:

$1,5 \cdot x^7 = 27$. (1 pont)

$x = \sqrt[7]{18} \approx$ (1 pont)

$\approx 1,5$ (1 pont)

Az algás terület naponta körülbelül a másfélszeresére növekedett. (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 26. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 25. feladat*

Összesen: 17 pont

30) **Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen?** **(2 pont)**

Megoldás:

156000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével. (2 pont)

Összesen: 2 pont

31) **A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az A Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6%-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6% volt.)**

a) **Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott?** **(3 pont)**

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) **Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel?** **(10 pont)**

c) **A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.)** **(4 pont)**

Megoldás:

a) A felvehető összeg: $700000 \cdot 1{,}06^2$ (2 pont)

ami **786520 Ft.** (1 pont)

b) (Az első évben x %-os volt a kamat.)

Az első év végén a számlán lévő összeg:

$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)$. (2 pont)

A második év végén a felvehető összeg:

$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)=907200$ (2 pont)

$x^2+203x-1040=0$ (3 pont)

$x_1=5$ (1 pont)

a másik gyök negatív (–208), nem felel meg. (1 pont)

Az első évben 5%-os volt a kamat. (1 pont)

A feladat megoldható mértani sorozat felhasználásával is.

c) Ha a két évvel ezelőtti ár y forint, akkor egy év múlva $1{,}04 \cdot y$, (1 pont)

két év múlva $1{,}04^2 \cdot y = 907200$ forint az ár. (1 pont)

$y=\frac{907200}{1{,}04^2}(\approx 838757)$ (1 pont)

Két évvel korábban $\approx$ **838757** Ft -ot kellett volna fizetniük. (1 pont)

Összesen: 17 pont

32) **Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.**

Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8 %-kal kamatozik.

a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8 %? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.) (5 pont)

Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.

b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Csilla számláján a 8%-os évi kamat a nyitótőke évi 1,08-szoros növekedését jelenti. (1 pont)

A 18. születésnapon 18. alkalommal növekszik így a tőke, (1 pont)

ezért Csilla 18. születésnapjára a nyitótőke

$S_{Csilla} = 500000 \cdot 1{,}08^{18} = 1998009{,}75$ -ra változna. (2 pont)

Csilla 18. születésnapján **1998010 Ft**-ot kaphatna. (1 pont)

b) Csongor számláján a p %-os kamat évente

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ -szeres évi növekedést eredményez (1 pont)

18 éven keresztül (1 pont)

A 18. születésnapján Csongor betétjén összesen

$S_{\text{Csongor}} = 400000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = 2000000 \text{ Ft}$ van. (2 pont)

Innen

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = 5$, vagyis $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36} = \sqrt[36]{5} \approx 1{,}04572$. (2 pont)

A keresett kamatláb tehát **4,57%.** (1 pont)

Összesen: 12 pont

33) **Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4 %-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben. 2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.**

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben? (4 pont)

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben? (4 pont)

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3 %-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76 %-a? (4 pont)

Megoldás:

a) Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,054. (1 pont)
2003-at követően a 2007-es évvel bezárólag 4 év telik el. (1 pont)
$41{,}9 \cdot 1{,}054^4 \ (\approx 51{,}71)$ (1 pont)
A 2007-es évben kb. **51,7 millió** autót gyártottak. (1 pont)

b) A 2003-at megelőző évekre évenként 1,011-del kell osztani. (1 pont)
1997 után a 2003-as évvel bezárólag 6 év telik el. (1 pont)
$\frac{41{,}9}{1{,}011^6} \ (\approx 39{,}24 \text{ millió})$ (1 pont)
1997-ben kb. **39,2 millió** autót gyártottak. (1 pont)

c) Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen x.
2008 után a 2013-as évvel bezárólag 5 év telik el.
$48{,}8 \cdot x^5 = 38$, (1 pont)
$x^5 \approx 0{,}779$ (1 pont)
$x \approx \sqrt[5]{0{,}779} \ (\approx 0{,}951)$ (1 pont)
Az évenkénti százalékos csökkenés kb. **4,9 %.** (1 pont)

d) Ha 2013 után y év múlva lesz 76 %-a az éves autószám, akkor $0{,}97^y \approx 0{,}76$.
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusa is egyenlő. (1 pont)
$y \lg 0{,}97 = \lg 0{,}76$ (1 pont)
$y \approx 9{,}01$ (1 pont)
Kb. 9 év múlva, tehát **2022-ben** csökkenne az évi termelés a 2013-as évinek a 76 %-ára. (1 pont)

Összesen: 17 pont

34) Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.

a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek 6 %-ával nő. Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés? (8 pont)
Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) A vezetési biztonság pontjai egy $t_0 = 90$, $q = 1{,}6$ hányadosú mértani sorozat tagjai. (1 pont)
(Ebben a sorozatban) $t_5 = 90 \cdot 1{,}06^5$ (pont). (1 pont)
$90 \cdot 1{,}06^5 \approx 120{,}44$ (1 pont)
tehát 5 év után a vezetési biztonság **120 pontos**. (1 pont)

b) Legyen a csökkenési ráta x. (1 pont)
Ekkor $2{,}152 x^5 = 0{,}9$ (2 pont)

$x^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0,4182)$, (1 pont)

amiből $x = \sqrt[5]{\frac{900}{2152}}$ (1 pont)

$x \approx 0,84$, (1 pont)

$1 - 0,84 = 0,16$, (1 pont)

tehát évente **16 %-kal** csökken az autó értéke. (1 pont)

Összesen: 12 pont

35) Egy sejttenyészetben 2 naponta kétszereződik meg a sejtek száma. Az első nap kezdetén 5000 sejtből állt a tenyészet. Hány sejt lesz a tenyészetben 8 nap elteltével?
Számításait részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A 8 nap alatt 4-szer kétszereződött meg a sejtek száma (s), (1 pont)

$s = 5000 \cdot 2^4$ (1 pont)

$\mathbf{s = 80000}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

36) A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

$2000 \cdot 1,06^x = 4024$. (1 pont)

$\lg 2000 + x \lg 1,06 = \lg 4024$

$x = \frac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1,06} \approx 11,998$. (2 pont)

12 teljes év alatt. (1 pont)

Összesen: 4 pont

37) Egy számtani sorozat első tagja 56, differenciája -4.

a) Adja meg a sorozat első 25 tagjának összegét! (2 pont)

b) Számítsa ki az n értékét és a sorozat n-edik tagját, ha az első n tag összege 408. (8 pont)

Egy mértani sorozat első tagja 10^{25}, hányadosa $0,01$.

c) Hányadik tagja ennek a sorozatnak a 100 000? (7 pont)

Megoldás:

a) A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$S_{25} = \frac{2 \cdot 56 + 24 \cdot (-4)}{2} \cdot 25 =$ (1 pont)

$= \mathbf{200}$ (1 pont)

b) A számtani sorozat első n tagjának összegére vonatkozó képlet alapján:

$408 = \frac{2 \cdot 56 + (n-1) \cdot (-4)}{2} \cdot n$. (1 pont)

A műveleteket elvégezve: $816 = 112n - 4n^2 + 4n$. (2 pont)

A másodfokú egyenlet: $4n^2 - 116n + 816 = 0$, (1 pont)

ennek gyökei, vagyis n lehetséges értékei: 12 és 17. (2 pont)

Ha $n = 12$, akkor $a_{12} = 56 + 11 \cdot (-4) = \mathbf{12}$. (1 pont)

Ha $n = 17$, akkor $a_{17} = 56 + 16 \cdot (-4) = \mathbf{-8}$. (1 pont)

c) A mértani sorozat n-edik tagjának kiszámítására vonatkozó képlet alapján: $100000 = 10^{25} \cdot 0{,}01^{n-1}$. (1 pont)

Ebből $10^5 = 10^{25} \cdot \left(10^{-2}\right)^{n-1}$. (2 pont)

A hatványozás azonosságainak felhasználásával: $10^{-20} = 10^{-2n+2}$. (2 pont)
Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $-20 = -2n + 2$. (1 pont)
$\boldsymbol{n = 11}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

38) Egy bomlási folyamatban a radioaktív részecskék száma kezdetben $6 \cdot 10^{23}$, amely érték percenként az előző érték századrészére csökken. Számítsa ki a radioaktív részecskék számát 10 perc elteltével! (2 pont)

<u>Megoldás:</u>

$\boldsymbol{6 \cdot 10^3 = 6000}$ (2 pont)

39) Zsuzsa nagyszülei elhatározzák, hogy amikor unokájuk 18 éves lesz, akkor vásárlási utalványt adnak neki ajándékba. Ezért Zsuzsa 18. születésnapja előtt 18 hónapon keresztül minden hónapban félretesznek valamekkora összeget úgy, hogy Zsuzsa 18. születésnapján éppen 90 000 forintjuk legyen erre a célra. Úgy tervezik, hogy az első alkalom után mindig 200 forinttal többet tesznek félre, mint az előző hónapban.

a) Terveik szerint mennyi pénzt tesznek félre az első, és mennyit az utolsó alkalommal? (7 pont)

Zsuzsa egyik testvére hét évvel idősebb a másik testvérénél. A két testvér életkorának mértani közepe 12.

b) Hány éves Zsuzsa két testvére? (5 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) Az egyes hónapokban félretett pénzösszegek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja (Ft-ban) a_1, (1 pont)
differenciája pedig 200. (1 pont)
A sorozat első 18 tagjának összege:
$\frac{2a_1 + 17 \cdot 200}{2} \cdot 18 = 90000$, (2 pont)
amiből $a_1 = 3300$. (1 pont)
A 18. tag $3300 + 17 \cdot 200 = 6700$. (1 pont)
Így az első alkalommal **3300 Ft-ot**, az utolsó alkalommal **6700 Ft-ot** tettek félre. (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 32. feladat*

Összesen: 12 pont

40) Egy számtani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; a és 18.

a) Határozza meg az a értékét és a sorozat differenciáját! (3 pont)

Egy mértani sorozat három egymást követő tagja ebben a sorrendben 32; b és 18.

b) Határozza meg a b értékét és a sorozat hányadosát! (5 pont)

A 32; c és 18 számokról tudjuk, hogy a három szám átlaga kettővel kisebb, mint a mediánja, továbbá $32 > c > 18$.

c) Határozza meg a c értékét! (5 pont)

Megoldás:

a) A számtani sorozat egyik tulajdonsága, hogy a sorozat bármely tagja egyenlő a tőle egyenlő távolságra lévő tagok számtani közepével, vagyis $a = \frac{32+18}{2} = \mathbf{25}$. (2 pont)

A sorozat differenciája bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a különbsége, ezért $d = 25 - 32 = \mathbf{-7}$ (1 pont)

b) A mértani sorozat egyik tulajdonsága, hogy bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a hányadosa egyenlő.

Ebből adódik, hogy $\frac{b}{32} = \frac{18}{b}$. (1 pont)

Az egyenletet rendezve kijön, hogy $\boldsymbol{b_1} = \mathbf{24}$ és $\boldsymbol{b_2} = \mathbf{-24}$. (2 pont)

Ha $b = 24$, akkor a sorozat kvóciense $q_1 = \frac{24}{32} = \mathbf{\frac{3}{4}}$ (1 pont)

Ha $b = -24$, akkor a sorozat kvóciense $q_2 = \frac{-24}{32} = -\mathbf{\frac{3}{4}}$. (1 pont)

c) *Lásd: Statisztika 38. feladat*

Összesen: 13 pont

41) Egy számtani sorozat negyedik tagja 7, ötödik tagja -5. Határozza meg a sorozat első tagját! Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat differenciája egyenlő bármely tagjának és az azt megelőző tagnak a különbségével, vagyis $d = a_5 - a_4 = -5 - 7 = \mathbf{-12}$. (1 pont)

A sorozat első tagja $a_1 = a_4 - 3d = 7 - 3 \cdot (-12) = \mathbf{43}$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

42) A kereskedelemmel foglalkozó cégek között több olyan is van, amely állandóan emelkedő fizetéssel jutalmazza a dolgozók munkavégzését. Péter munkát keres, és két cég ajánlata közül választhat:

I. ajánlat: Az induló fizetés 200 000 Ft, amit havonta 5000 Ft-tal emelnek négy éven át.

II. ajánlat: Az induló fizetés 200 000 Ft, amit havonta 2%-kal emelnek négy éven át.

a) Melyik ajánlatot válassza Péter, ha tervei szerint négy évig a választott munkahelyen akar dolgozni, és azt az ajánlatot szeretné választani, amelyik a négy év alatt nagyobb összjövedelmet kínál? (7 pont)

A Péter szerződésében szereplő napi 8 óra munkaidő rugalmas, azaz lehetnek olyan napok, amikor 8 óránál többet, és olyanok is, amikor kevesebbet dolgozik. 6 óránál kevesebbet, illetve 10 óránál többet sosem dolgozik egy nap. Az alábbi táblázatban Péter januári munkaidő-kimutatásának néhány adata látható.

Napi munkaidő (óra)	6	7	8	9	10
Hány munkanapon dolgozott ennyi órát?	4	5			3

b) Számítsa ki a táblázatból hiányzó két adatot, ha tudjuk, hogy január hónap 22 munkanapján Péter átlagosan naponta 8 órát dolgozott! (6 pont)

***Megoldás*:**

a) Az I. ajánlatban Péter havi fizetése egy 5000 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai, ahol a sorozat első tagja 200000. Így az első 48 tag összege $S_{48} = \frac{2 \cdot 200000 + 47 \cdot 5000}{2} \cdot 48 = \mathbf{15\ 240\ 000\,Ft}$. (3 pont)

A II. ajánlatban egy mértani sorozatot írhatunk fel, melynek első tagja 200000, kvóciense $1{,}02$. Itt az első 48 tag összege:

$S'_{48} = 200000 \cdot \frac{1{,}02^{48} - 1}{1{,}02 - 1} = \mathbf{15\ 870\ 700\,Ft}$. (3 pont)

Mivel II. ajánlat során a négy év alatti összjövedelem nagyobb, a II. ajánlatot érdemes választania. (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 40. feladat*

Összesen: 13 pont

43) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő függvény adja meg: $f(x) = 51 \cdot 1{,}667^x$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózaból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

***Megoldás*:**

a) *Lásd: Szöveges feladatok 41. feladat*

b) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 30. feladat*

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 30. feladat*

d) A megadott időszakban a vezetékes hívások száma mértani sorozatot alkot, melynek első tagja 4200 (millió darab) és hányadosa $q = 0{,}92$. (2 pont)

$4200 \cdot 0{,}92^9 \approx 1983{,}08$ (1 pont)

≈ 1983 millió vezetékes hívást indítottak 2009-ben. (1 pont)

2000 eleje és 2009 vége között összesen

$4200\cdot\dfrac{0,92^{10}-1}{0,92-1}\approx 29694,6$ (1 pont)

$\approx$**29695 millió** vezetékes hívást indítottak. (1 pont)

Összesen: 17 pont

44) Egy mértani sorozat második tagja 6, harmadik tagja –18. Adja meg a sorozat ötödik tagját! (2 pont)

Megoldás:

$a_2=a_1\cdot q \quad a_3=a_1\cdot q^2\Rightarrow\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_1\cdot q^2}{a_1\cdot q}=q$

(1 pont)

$a_2=6 \quad a_3=-18\Rightarrow q=\dfrac{-18}{6}=-3$

$a_5=a_3\cdot q^2=-18\cdot(-3)^2=\mathbf{-162}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

45) Egy matematikaversenyen 25 feladatot kell a résztvevőknek megoldaniuk 75 perc alatt. A felkészülés során Vera azt tervezgeti, hogy mennyi időt töltsön majd a könnyebb feladatok megoldásával, és mennyi időt hagyjon a nehezebbekre. Az első feladatra 1 percet szán. A versenyfeladatok általában egyre nehezedő sorrendben vannak megadva; Vera ezt úgy veszi figyelembe a tervezésnél, hogy a második feladattól kezdve mindig ugyanannyival növeli az egyes feladatok megoldására fordítható időt. Vera a rendelkezésére álló teljes időtartamot szeretné kitölteni a feladatok megoldásával.

a) A terv szerint összesen mennyi időt szán Vera az utolsó 4 feladat megoldására? (7 pont)

A versenyzőknek minden feladat megoldása után öt lehetséges válasz közül kell az egyetlen helyes választ kiválasztaniuk. Egy versenyző pontszámának kiszámítása a $4\cdot H-R+F$ képlettel történik, ahol H a helyes válaszok, R a rossz feladatok, F pedig a kitűzött feladatok számát jelenti (a kihagyott feladatokra 0 pont jár). Vera a 25 kitűzött feladat közül 3-at hagyott ki, és összesen 93 pontot szerzett.

b) Hány helyes választ adott Vera? (5 pont)

Vera osztályából összesen 11-en indultak a versenyen. Közülük ugyanannyian oldották meg a 24-es, mint a 25-ös feladatot. Sőt ugyanennyien voltak azok is, akik a két feladat egyikét sem oldották meg. Egy olyan versenyző volt az osztályban, aki a 24-es és a 25-ös feladatot is megoldotta.

c) Hányan voltak az osztályban azok, akik a 24-es feladatot megoldották, de a 25-ös feladatot nem? (5 pont)

Megoldás:

a) A terv szerint az egyes feladatokra szánt időtartamok olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek első tagja 1 (perc), és az első 25 tagjának összege 75 (perc) (1 pont)

A sorozat különbségét d-vel jelölve az adatok alapján felírható:

$\dfrac{2\cdot 1+24d}{2}\cdot 25=75$. (1 pont)

Ebből $d=\dfrac{1}{6}$ (perc). (1 pont)

A számtani sorozat első 21 tagjának összege:

$$\frac{2\cdot 1+20\cdot\frac{1}{6}}{2}\cdot 21=56$$ (2 pont)

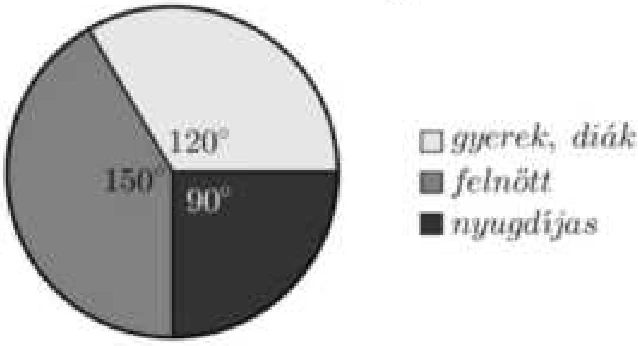
Így az utolsó 4 feladatra összesen $(75-56=)$ **19 percet** szánt Vera a terc szerint. (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 42. feladat*

c) *Lásd: Halmazok 31. feladat*

Összesen: 17 pont

46) Az alábbi kördiagramm egy balatoni strandon a júliusban megvásárolt belépőjegyek típusának eloszlását mutatja.



Júliusban összesen 16416 fő vásárolt belépőjegyet. A belépőjegyek árát az alábbi táblázat tartalmazza.

gyerek, diák	**350 Ft/fő**
felnőtt	**700 Ft/fő**
nyugdíjas	**400 Ft/fő**

a) Mennyi volt a strand bevétele a júliusban eladott belépőkből? (5 pont)

A tapasztalatok szerint júliusban folyamatosan nő a strandolók száma. Ezért a strandbüfében rendszer, hogy július 1-jei megrendelést követően július 2-től kezdve július 31-ig minden nap ugyanannyi literrel növelik a nagykereskedésből megrendelt üdítő mennyiségét. A könyvelésből kiderült, hogy július 1-jén, 2-án és 3-án összesen 165 litert, július 15-én pedig 198 litert rendeltek.

b) Hány liter üdítőt rendeltek júliusban összesen? (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 44. feladat*

b) A napi üdítőrendelések egy számtani sorozat tagjai, melynek első tagja a_1, differenciája d. Az első 31 tag összegét kell kiszámolni. (1 pont)

A szöveg szerint:

$a_1+a_1+d+a_1+2d=165$ és $a_1+14d=198$ (1 pont)

A második egyenletből a_1-et kifejezve és az első egyenletbe behelyettesítve:

$3\cdot(198-14d)+3d=165$ (1 pont)

ahonnan $-39d=-429$ (1 pont)

így $d=11$ és $a_1=44$ (1 pont)

$S_{31}=\frac{2\cdot 44+30\cdot 11}{2}\cdot 31=$ (1 pont)

6479 liter üdítőt rendeltek júliusban. (1 pont)

Összesen: 12 pont

47) **Egy mértani sorozat második tagja 5, ötödik tagja 40. Határozza meg a sorozat első tagját! Megoldását részletezze!** **(4 pont)**

Megoldás:

Az első tag meghatározásához ki kell számolnunk a sorozat hányadosát.
A második és az ötödik tag felírásával egy egyenletrendszert kapunk:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 q = 5 \\ a_1 q^4 = 40 \end{array}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletet elosztva az elsővel: $q^3 = \frac{40}{5} = 8$, (1 pont)

tehát $q = \sqrt[3]{8} = 2$. (1 pont)

Az első egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy $\boldsymbol{a_1 = 2,5}$. (1 pont)

Összesen: 4 pont

48) **Egy számtani sorozat negyedik tagja 4, tizenhatodik tagja –2.**

a) Számítsa ki a sorozat első 120 tagjának az összegét! **(5 pont)**

b) Adott egy szakasz két végpontja: $A(0;4)$ és $B(2;3)$. Írja fel az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét! **(5 pont)**

c) Egy elsőfokú függvény a 0-hoz 4-et, a 2-höz 3-at rendel. Írja fel a függvény hozzárendelési szabályát! **(4 pont)**

Megoldás:

a) Az összeg meghatározásához ki kell számolnunk a sorozat differenciáját. A negyedik és a tizenhatodik tag felírásával egy egyenletrendszert kapunk: $\left.\begin{array}{l} a_1 + 3d = 4 \\ a_1 + 15d = -2 \end{array}\right\}$ (1 pont)

A második egyenletből kivonva az elsőt, megkapjuk, hogy
$12d = -6 \Rightarrow d = -0,5$. (1 pont)

Visszahelyettesítve az első egyenletbe: $a_1 = 4 - 3 \cdot (-0,5) = 5,5$ (1 pont)

Az első 120 tag összege: $S_{120} = \frac{2 \cdot 5,5 + 119 \cdot (-0,5)}{2} \cdot 120 = \mathbf{-2910}$ (2 pont)

b) *Lásd: Koordinátageometria 40. feladat*

c) *Lásd: Függvények 57. feladat*

Összesen: 14 pont

49) **Egy számtani sorozat negyedik tagja 8, ötödik tagja 11. Számítsa ki a sorozat első tíz tagjának összegét! Megoldását részletezze!** **(4 pont)**

Megoldás:

A sorozat differenciája az ötödik és a negyedik tag különbsége, azaz $d = a_5 - a_4 = 11 - 8 = 3$. (1 pont)

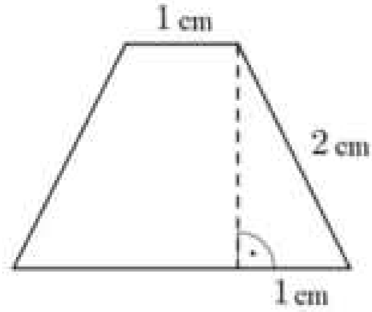
Átrendezve az $a_4 = a_1 + 3d$ egyenletet kapjuk, hogy $a_1 = a_4 - 3d = 8 - 3 \cdot 3 = -1$

(1 pont)

Az első tíz tag összege a számtani sorozat összegképlete alapján:
$S_{10} = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot (-1) + 9 \cdot 3}{2} \cdot 10 = \mathbf{125.}$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

50) **Az edzésen megsérült Cili térde, ezért megműtötték. A műtét utáni naptól kezdve rendszeres napi sétát írt elő neki a gyógytornász. Cili az első nap csak 20 métert sétált, majd minden nap 15 százalékkal nagyobb távot tett meg, mint az előző napon.**

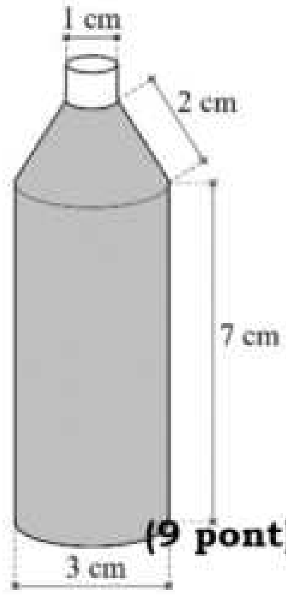


a) Egyik nap séta közben ezt mondta Cili: „A mai napon már 1000 métert sétáltam!” Hányadik napon mondhatta ezt először? **(6 pont)**

Cili – hogy segítse szervezete regenerálódását – vitamincseppeket szed. Naponta 2×25 csepp az adagja. Körülbelül 20 csepp folyadék térfogata 1 milliliter. A folyadék milliliterenként 100 milligramm hatóanyagot tartalmaz.

b) Hány milligramm hatóanyagot kap naponta Cili cseppek formájában? **(2 pont)**

A vitaminoldatot olyan üvegben árulják, amely két henger alakú és egy csonkakúp alakú részből áll. A folyadék a csonkakúp alakú rész fedőlapjáig ér. Az üveg belső méreteit az ábra mutatja. A nagyobb henger átmérője 3 cm, magassága 7 cm. A csonkakúp fedőlapjának átmérője 1 cm, alkotója 2 cm hosszú.



c) Hány napig elegendő Cilinek az üvegben lévő vitaminoldat, ha mindig az előírt adagban szedi? **(9 pont)**

Megoldás:

a) A Cili által naponta megtett távolságok mértani sorozatot alkotnak, melynek első tagja $a_1 = 20$, hányadosa $q = 1{,}15$. (1 pont)

Ha a Cili által megtett táv az n-edik napon érte el először az 1000 métert, akkor $a_n = 20 \cdot 1{,}15^{n-1} = 1000$. (1 pont)

Mindkét oldalt 20-szal elosztva, és az oldalak logaritmusát véve $\lg 1{,}15^{n-1} = \lg 50$ (1 pont)

Egy hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot alkalmazva: $(n-1) \cdot \lg 1{,}15 = \lg 50$. (1 pont)

Az egyenletet n-re rendezve: $n = \dfrac{\lg 50}{\lg 1{,}15} + 1 = 28{,}99$. (1 pont)

Mivel felfelé kerekítünk, Cili a **29. napon** mondhatta először, hogy aznap már 1000 métert sétált. (1 pont)

b) *Lásd: Szöveges feladatok 47. feladat*

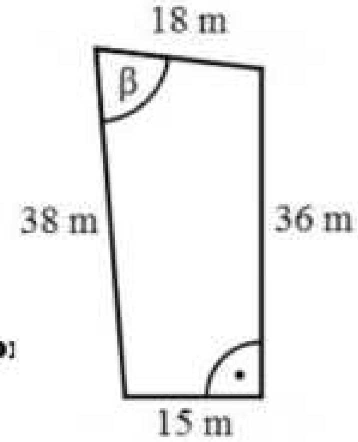
c) *Lásd: Térgeometria 39. feladat*

Összesen: 17 pont

51) **A Molnár házaspár építési telket vásárolt. Öt évvel korábban egy bankban 7 millió Ft-ot helyeztek el kamatos kamatra. Az 5 év elteltével Molnárék 8 115 000 Ft-ot vehettek fel a bankból.**

a) Hány százalékos kamatot fizetett évente a bank, ha a kamatláb az 5 év során nem változott? **(4 pont)**

Az építési telket egy olyan övezetben vásárolták, ahol a telkek területének a 20 százaléka építhető be. A megvásárolt telek méretei az ábrán láthatók. A telek 15 méteres és 36 méteres oldala merőleges egymásra.



b) Határozza meg a 18 méter és a 38 méter hosszú oldalak által bezárt szög (β) nagyságát, és számítsa ki a telken beépíthető rész területét!(9 po

Molnár úr kulcscsomóján négy ugyanolyan kinézetű kulcs van, amelyek közül az egyik az új telek kapuját nyitja. Molnár úr általában nem találja el elsőre, hogy melyik kulcs való ebbe a zárba.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kapuhoz érve Molnár úr először nem a megfelelő kulccsal próbálja kinyitni a kaput, de a második próbálkozása már sikeres lesz! (Molnár úr két különböző kulcsot próbál a zárba.) (4 pont)

Megoldás:

a) 5 évi kamatos kamatot számolva: $8115000 = 7000000 \cdot x^5$, ahonnan $x = \sqrt[5]{\dfrac{8115}{7000}} \approx 1{,}03$. (3 pont)

Tehát a bank kb. **3 százalékos kamatot** fizetett. (1 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 52. feladat*

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 65. feladat*

Összesen: 17 pont

52) Egy mértani sorozat második tagja 6, harmadik tagja −12. Számítsa ki a sorozat első tíz tagjának összegét! Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

A sorozat hányadosa: $q = \dfrac{-12}{6} = -2$ (1 pont)

A sorozat első tagja: $a_1 = \dfrac{6}{-2} = -3$ (1 pont)

A sorozat első tíz tagjának összege: $S_{10} = -3 \cdot \dfrac{(-2)^{10} - 1}{-2-1} = \mathbf{-1025}$ (2 pont)

Összesen: 4 pont

53) Péter elhatározza, hogy összegyűjt 3,5 millió Ft-ot egy használt elektromos autó vásárlására, mégpedig úgy, hogy havonta egyre több pénzt tesz félre a takarékszámláján. Az első hónapban 50 000 Ft-ot tesz félre, majd minden hónapban 1000 Ft-tal többet, mint az azt megelőző hónapban. (A számlán gyűjtött összeg kamatozásával Péter nem számol.)

a) Össze tud-e így gyűjteni Péter 4 év alatt 3,5 millió forintot? (5 pont)

A világon gyártott elektromos autók számának 2012 és 2017 közötti alakulását az alábbi táblázat mutatja.

év	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	**110 000**	**221 000**	**409 000**	**727 000**	**1 186 000**	**1 928 000**

b) Szemléltesse a táblázat adatait oszlopdiagramon! (3 pont)

Péter az előző táblázat adatai alapján olyan matematikai modellt alkotott, amely az elektromos autók számát exponenciálisan növekedőnek tekinti. E szerint, ha a 2012 óta eltelt évek száma *x*, akkor az elektromos autók számát (millió darabra) megközelítőleg az $f(x) = 0{,}122 \cdot 2^{0{,}822x}$ összefüggés adja meg.

c) A modell alapján számolva melyik évben érheti el az elektromos autók száma a 25 millió darabot? (5 pont)

Egy elektromos autókat gyártó cég öt különböző típusú autót gyárt. A készülő reklámfüzet fedőlapjára az ötféle típus közül egy vagy több (akár mind az öt) autótípus képét szeretné elhelyezni a grafikus.

d) Hány lehetőség közül választhat a tervezés során? (Két lehetőség különböző, ha az egyikben szerepel olyan autótípus, amely a másikban nem.) (4 pont)

Megoldás:

a) 4 év 48 hónapból áll. (1 pont)

Az egyes hónapokban félretett összegek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, az első tag 50 000, a differencia 1000, így a 48. hónapban Péter $a_{48} = 50000 + 47 \cdot 1000 = 97000$ Ft-ot fog félrerakni. (1 pont)

48 hónap alatt a megtakarítások összege összesen:

$S_{48} = \dfrac{50000 + 97000}{2}.48 = 3528000$ Ft. (2 pont)

Tehát 4 év **elegendő** 3,5 millió Ft összegyűjtésére. (1 pont)

b) *Lásd: Statisztika 53. feladat*

c) *Lásd: Függvények 35. feladat*

d) *Lásd: Kombinatorika 39. feladat*

Összesen: 17 pont

54) Egy mértani sorozat első tagja 6, negyedik tagja 48. Adja meg a sorozat harmadik tagját! (2 pont)

Megoldás:

Először kiszámítjuk hányadost: $a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow q = \sqrt[3]{\dfrac{a_4}{a_1}} = \sqrt[3]{\dfrac{48}{6}} = 2$. (1 pont)

Az első tag és a hányados ismeretében könnyen megadhatjuk a harmadik tagot: $a_3 = a_1 q^2 = 6 \cdot 2^2 = \mathbf{24}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

55) a) Egy számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 8. A sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege 9. Adja meg a sorozat első tíz tagjának összegét! (7 pont)

b) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm-rel, a másik 9 cm-rel rövidebb, mint az átfogó. Mekkorák a háromszög oldalai? (7 pont)

Megoldás:

a) A feladat szövege alapján felírható a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{array}{l} 2a_1 + 2d = 8 \\ 3a_1 + 9d = 9 \end{array}\right\}$

(2 pont)

Az első egyenletből a_1-et kifejezve: $a_1 = \frac{8-2d}{2} = 4-d$. (1 pont)

Ezt a másik egyenletbe helyettesítve: $12-3d+9d=9$, azaz $6d=-3$. (1 pont)

Az egyenletrendszer megoldása $a_1 = 4{,}5$ és $d = -0{,}5$. (1 pont)

Az első tíz tag összege: $S_{10} = \frac{2\cdot 4{,}5+9\cdot(-0{,}5)}{2}\cdot 10 = \mathbf{22{,}5}$. (2 pont)

Alternatív megoldás:

A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2} = 4$ és $a_4 = \frac{a_3+a_4+a_5}{3} = 3$ (3 pont)

A differencia: $d = \frac{a_4-a_2}{2} = -0{,}5$. (1 pont)

Az első tag: $a_1 = a_2 - d = 4{,}5$ (1 pont)

Az első tíz tag összege: $S_{10} = \frac{2\cdot 4{,}5+9\cdot(-0{,}5)}{2}\cdot 10 = \mathbf{22{,}5}$. (2 pont)

b) *Lásd: Síkgeometria 57. feladat*

Összesen: 14 pont

56) Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{2}$, második tagja 3. Határozza meg a sorozat harmadik tagját! (2 pont)

Megoldás:

A mértani sorozat hányadosát kiszámolva meghatározhatjuk a sorozat harmadik tagját, ami **18**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

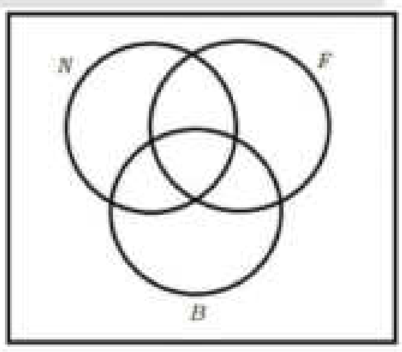
57) Egy erdészetben azt tervezték, hogy 30 nap alatt összesen 3000 fát ültetnek el úgy, hogy a második naptól kezdve minden nap 2-vel több fát ültetnek el, mint az azt megelőző napon.

a) Hány fát kellett elültetni az első napon, és hány fát kellett elültetni a 30. napon a terv teljesítéséhez? (5 pont)

A telepítés után egy évvel három szempontból vizsgálják meg a telepített fák állapotát. Ha valamelyik nem fejlődik megfelelően akkor *N* jelet kap. Ha fertőző betegség tünetei mutatkoznak rajta, akkor *B* jelet, ha pedig valamilyen fizikai kár érte (pl. a szél megrongálta), akkor az *F* jelet kapja. Egy fa több jelet is kaphat.

Az összes jelölés elvégzése és összesítése után kiderült, hogy a telepített 3000 fa közül *N* jelet 45, *B* jelet 30, *F* jelet 20 fa kapott. Ezeken belül *N* és *B* jelet 21, *N* és *F* jelet 13, *B* és *F* jelet 4 fának adtak. 2 olyan fa van, amely mindhárom jelet megkapta.

b) Töltse ki az alábbi halmazábrát a megfelelő adatokkal!Állapítsa meg, hogy hány olyan fa van a telepítettek között, amelyik nem kapott semmilyen jelet! (6 pont)



Egy erdő faállománya az elmúlt időszakban évről évre 3%-kal növekedett. A faállomány most

10000 m^3.

c) Hány év múlva éri el az erdő faállománya a 16000 m^3-t, ha az továbbra is évről évre 3%-kal növekszik? (6 pont)

Megoldás:

a) Az egymás utáni napokon elültetett fák száma egy olyan $\{a_n\}$ számtani sorozat első 30 tagját alkotja, melynek differenciája 2. (1 pont)

A feladat szövege alapján:

$S_{30} = \frac{2a_1 + 29 \cdot 2}{2} \cdot 30 = 3000$ (1 pont)

Ebből kapjuk, hogy az első napon $a_1 = \mathbf{71}$, (2 pont)

a 30. napon pedig $a_{30} = 71 + 29.2 = \mathbf{129}$ fát kellett elültetni a terv teljesítéséhez. (Ezek megfelelnek a feladat feltételeinek.) (1 pont)

b) *Lásd: Halmazok 42. feladat*

c) Egy év alatt a faállomány az 1,03-szorosára változik. (1 pont)

(Ha x év múlva lesz 16000 m^3 a faállomány, akkor)

$1000 \cdot 1{,}03^x = 16000$ (1 pont)

$1{,}03^x = 1{,}6$ (1 pont)

$x = \log_{,03} 1{,}6 \left(= \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}03} \right) \approx 15{,}9$ (2 pont)

Tehát kb. 16 év múlva éri el a faállomány a 16000 m^3-t. (1 pont)

Összesen: 17 pont

58) Anna öt napon át egy 200 méter hosszú futókörre jár futni. Az előző nap 5 kört fut, majd a második naptól kezdve minden nap 1 körrel többet fut, mint az előző napon. Hány métert fut Anna összesen 5 nap alatt? (2 pont)

Megoldás:

A számtani sorozat összegképletébe behelyettesítve kapjuk, hogy összesen 35 kört, azaz **7000 métert fut Anna az öt nap alatt.** (2 pont)

Összesen: 2 pont

59) Gondoltam egy számra. A szám feléből kivontam 5-öt, a különbséget megszoroztam 4-gyel, majd az így kapott számhoz hozzáadtam 8-at. Így éppen az eredeti számot kaptam eredményül.

a) Melyik számra gondoltam? (5 pont)

b) Egy számtani sorozat tizedik tagja 18, harmincadik tagja 48. Adja meg a sorozat első tagját és differenciáját! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 58. feladat*

b) A sorozat első tagját a-val jelölve, differenciáját d-vel jelölve a szöveg alapján felírható egyenletrendszer: $\left. \begin{array}{l} a + 9d = 18 \\ a + 29d = 48 \end{array} \right\}$ (2 pont)

Az első egyenletből kifejezve a-t és a második egyenletbe helyettesítve: $18 - 9d + 29d = 48$ (1 pont)

Az előző egyenletet megoldva kapjuk, hogy $\boldsymbol{d = 1{,}5}$, (1 pont)

a sorozat első tagja 4,5. (1 pont)

Összesen: 10 pont

60) Egy számtani sorozat második tagja 8, negyedik tagja 18. Határozza meg a sorozat első tagját! **(2 pont)**

Megoldás:

Egy számtani sorozatban $a_n = a_1 + (n-1)d$, ezért $a_2 = a_1 + d = 8$ és $a_4 = a_1 + 3d = 18$.

A sorozat negyedik tagjából kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy

$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d) - (a_1 + d) = a_1 + 3d - a_1 - d = 2d = 18 - 8 = 10$, innen $d = 5$.

(1 pont)

A fenti képletet alkalmazva $a_1 + 5 = 8$, így $\boldsymbol{a_1 = 3}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

61) a) Az $x \mapsto mx + b$ lineáris függvény 1-hez 200-at, 21-hez pedig 5200-at rendel. Adja meg *m* és *b* értékét! **(5 pont)**

Anna szeretne részt venni a Balaton-átúszáson, amelyhez két különböző 21 napos edzéstervet készít. Azt már elhatározta, hogy az első napon 200 métert, az utolsó, 21. napon pedig az átúszás teljes távját, 5200 métert úszik. Az egyik edzéstervben a napi úszásmennyiségek egy számtani sorozat egymást követő tagjai, a másik változatban pedig (jó közelítéssel) egy mértani sorozaté.

b) A teljes felkészülés alatt összesen hány métert úszna Anna az egyik, illetve a másik változatban? **(8 pont)**

A 2020-as Balaton-átúszáson az indulók 36%-a volt nő, átlagéletkoruk 35 év. Az indulók 64%-a volt férfi, átlagéletkoruk 38 év.

c) Mennyi volt ebben az évben az összes induló átlagéletkora? **(4 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények 70. feladat*

b) Számtani sorozat esetén $(a_1 = 200,\ a_{21} = 5200)$:

$S_1 = \frac{(200 + 5200)}{2} \cdot 21 = \mathbf{56\ 700}$ **métert** úszna Anna a teljes felkészülés alatt.

(3 pont)

Mértani sorozat esetén $(b_1 = 200,\ b_2 = 5200)$: $5200 = 200 \cdot q^{20}$. (1 pont)

$q^{20} = 26$ (1 pont)

$q \approx 1{,}177$ (1 pont)

Így $S_{21} = 200 \cdot \frac{1{,}177^{21} - 1}{1{,}177 - 1} \approx \mathbf{33\ 500}$ **métert** úszna Anna. (2 pont)

c) *Lásd: Statisztika 61. feladat*

Összesen: 17 pont

62) Egy sorozat első tagja 5. A második tagtól kezdve minden tag az előző tag (-2)-szeresénél 1-gyel nagyobb szám. Adja meg a sorozat második és harmadik tagját! **(3 pont)**

Megoldás:

A második tag: $5 \cdot (-2) + 1 = \mathbf{-9}$. (1 pont)

A harmadik tag: $(-9) \cdot (-2) + 1 = \mathbf{19}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

63) a) Egy számtani sorozat második tagja 24, ötödik tagja 81. Hány százalékkal nagyobb a sorozat első 16 tagjának összege a sorozat 106. tagjánál? (8 pont)

b) Egy mértani sorozat második tagja 24, ötödik tagja 81. A sorozat tagjai között hány olyan van, amelyik kisebb, mint 10 000 000? (9 pont)

Megoldás:

a) A sorozat differenciája: $d=\frac{81-24}{3}=19$. (2 pont)

A sorozat első tagja: $a_1=24-19=5$. (1 pont)

A sorozat első 16 tagjának összege: $S_{16}=\frac{2\cdot 5+15\cdot 19}{2}\cdot 16=2360$. (2 pont)

A sorozat 106. tagja: $a_{106}=5+105\cdot 19=2000$. (1 pont)

$\frac{2360}{2000}=1{,}18$ (1 pont)

Azaz **18%-kal** nagyobb a sorozat első 16 tagjának összege a sorozat 106. tagjánál. (1 pont)

b) A sorozat hányadosa: $q=\sqrt[3]{\frac{81}{24}}=1{,}5$. (2 pont)

A sorozat első tagja: $a_1=\frac{24}{1{,}5}=16$. (1 pont)

A sorozat n-edik tagja: $a_n=16\cdot 1{,}5^{n-1}$. (1 pont)

Megoldjuk a $16\cdot 1{,}5^{n-1}=10\,000\,000$ egyenletet. (1 pont)

$1{,}5^{n-1}=625\,000$ (1 pont)

$n-1=\log_{1{,}5}625\,000$ (1 pont)

$n\approx 33{,}9$ (1 pont)

A sorozat szigorúan monoton növekvő, ezért a sorozatnak **33** tagja kisebb, mint 10 000 000. (1 pont)

Összesen: 17 pont